Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico
y Estadística

Nombre: *Prof. Hugo Montesinos*
Carné: *Clave, guía de solución*
Sección: *6 (sirve para todas)*

Probabilidades para Ingenieros (CO3121) - Septiembre-Diciembre 2011

(**SIMULACRO** - *Este es un examen ficticio, de mentira. Solamente para estudiar. Adaptación de examen de año anterior*)

E2: 35%, Duración: 1 hora y 50 minutos.

Conteste cada pregunta en el espacio destinado para ello, las violaciones serán penalizadas. Recuerde que el examen es individual. No se permite el uso de calculadora.

1. Verdadero o Falso (1 punto c/u. *No es necesario que justifique.* ***Una pregunta mala elimina una buena.***)

1. Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $P(-1 < Z < 0) = 0.5$ V F
2. Si $X \sim N(150,25)$ entonces $P(145 < X < 155) = 0.9$ V F
3. Si X y Y son v.a. independientes, entonces la función de distribución acumulada (f.d.a.) del producto es el producto de las f.d.a. marginales V F
4. Si X y Y son v.a. iid entonces $Cov(X,Y)=0$ V F
5. Si $\Gamma \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $T \sim \exp\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right)$ entonces $E(T) = 2\mu + \sigma^2$ V F

2. (Marginales-Condicionales) Un empresario desea montar una cafetería. En dicho local sólo se venderán dos marcas de refrescos: Coca-Cola y Pepsi-Cola. Para ello ha realizado un estudio sobre cuál es la demanda de bebidas de refrescos en la zona donde va a situar el local. Como resultado del estudio se concluye que la demanda conjunta semanal de ambas, tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 0 < y < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo X y Y las variables aleatorias que expresan la demanda de Coca-Cola y de Pepsi-Cola en miles de unidades, respectivamente.

2.1. Determine el valor de k. (3 puntos)

2.2. Si la demanda de Coca-Cola es de 1500 unidades ($X = 1.5$), ¿cuál es la demanda esperada de Pepsi-Cola? (3 puntos)

2.3. ¿Qué distribución sigue $Y \mid X = x$? (2 puntos)

3. (Cambio de Variable) Luego de una catástrofe, es necesario el suministro de víveres por vía aérea para labores de rescate. Al lanzar un paquete con víveres, considere que el lugar donde cae el paquete es un vector aleatorio bidimensional (X, Y) distribuido uniformemente en un círculo de radio R, centrado en el blanco.

3.1. Halle la densidad conjunta de X y Y (2 puntos)

3.2. ¿Son X y Y independientes? Justifique. (3 puntos)

3.3. Sea D la distancia entre el blanco (lugar donde debe caer el paquete) y donde efectivamente cae. Halle la función de densidad de probabilidad de D. (3 puntos)

4. (Mínimos, exponenciales, etc.)

4.1. Demuestre que si X e Y son v.a. exponenciales, independientes, con parámetros μ y λ, respectivamente, entonces la distribución del mínimo es también exponencial y determine su parámetro. (3 puntos)

4.2. Demuestre la propiedad de pérdida de memoria para la distribución exponencial, es decir, muestre que para cualesquiera enteros positivos a y b, $P(X > a+b \mid X > a) = P(X > b)$. (3 puntos)

4.3. Considere una fuente de poder cuyo tiempo de vida se distribuye exponencial con media 2 años. Si dicha fuente ha funcionado correctamente por 1 año, calcule la probabilidad de que funcione por un año adicional. (2 puntos)

5. (TLC, Chebyshev, impelable). A través de una encuesta se quiere estimar la fracción p de adultos de la población que se interesaría en un nuevo producto. Se interroga a n personas de la población, y se estima p como $\hat{p} = \frac{X}{n}$, siendo X el número de personas encuestadas que manifiestan interés en el producto.

5.1. Utilice la desigualdad de Chebyshev para acotar el tamaño de la muestra, si se quiere que p y $\hat{p}$ difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9. (2 ptos)

5.2. Utilice el T.L.C. para aproximar la misma probabilidad de la parte 1. (3 ptos)

5.3. Compare los resultados de las partes 1 y 2. (1 ptos)

Prof. Hugo Montesinos